Titulo: Sistematizacion del concepto función. Una necesidad de su adecuación en los programas de matemática en la escuela cubana actual.

Title:Sistematization of the function concept. A need of its adequation in the Math syllabus in the current cuban school

Autores: DrC. Carlos Manuel Caraballo Carmona, profesor titular
MSc. Francisco Lázaro García Fernández, profesor auxiliar
Lic. Serdaniel Nieves Pupo

Resumen:
En el presente artículo se realiza una sistematización del concepto función expuesto en diferentes cursos de Análisis Matemático, así como el modo en que se trata este concepto en la asignatura Matemática en el contexto de la escuela cubana actual, reflexionando y argumentando sobre nuevas posiciones acerca de cómo debe definirse, con el objetivo de lograr coherencia y sistematicidad con otras propiedades que caracterizan a las funciones que se estudian en la asignatura Matemática en los momentos actuales en la enseñanza media y general media en Cuba.

Abstract:
In the current article a systematization of the function concept exposed in different courses of math analysis is being made , as well as the mode this concept is treated in mathematics subject in the nowadays school cuban context, reflecting and giving arguments about new positions about defining, with the objective of achieving coherence and systematization with other properties which characterize the functions studied in mathematics subject in the current days in the junior and general junior teaching in Cuba.

Palabras claves: función, propiedades, función total, función parcial, uniforme, multiforme, dominio, imagen, conjunto de partida, conjunto de llegada, correspondencia.

Key words:

Function, Mathematics (Math), Properties, Total function, Parcial function, uniform, multiform, management, image, set of starting point, arrrival set, correspondance.

Desarrollo

Breve reseña histórica del concepto función

En la obra Introduction in Analysis Infinitorum, Leonhard Euler intenta por primera vez dar una definición formal del concepto de función al afirmar que: "Una función de cantidad variable es una expresión analítica formada de cualquier manera por esa cantidad variable y por números o cantidades constantes''. Como puede observarse, esta definición difiere de la que actualmente se conoce, pues siete años después afirmó: ''Algunas cantidades en verdad dependen de otras, si al ser combinadas las ultimas las primeras también sufren cambio, y entonces las primeras se llaman funciones de las últimas. Esta denominación es bastante natural y comprende cada método mediante el cual una cantidad puede ser determinada por otras. Así, si x denota una cantidad variable, entonces todas las cantidades que dependen de x en cualquier forma estan determinadas por x y se les llama funciones de x''.
En la historia de las matemáticas se le dan créditos al matemático suizo Leonhard Euler(1707-1783) por precisar el concepto de función, así como por realizar un estudio sistemático de todas las funciones elementales, incluyendo sus derivadas e integrales; sin embargo, el concepto mismo de función nació con las primeras relaciones observadas entre dos variables, hecho que seguramente surgió desde los inicios de la matemática en la humanidad, con civilizaciones como la babilónica, la egipcia y la china.
Antes de Euler, el matemático y filósofo francés Rene Descartes(1596-1650) mostró en sus trabajos de geometría que tenía una idea muy clara de los conceptos de "variable'' y "función'', realizando una clasificación de las curvas algebraicas según sus grados, reconociendo que los puntos de intersección de dos curvas se obtienen resolviendo, en forma simultánea, las ecuaciones que las representan.

Sobre la definición del concepto función

En matemáticas, una función se dice que es **total** si *está definida* para todo el conjunto de partida. Para comprender esto, debemos saber que:

Sea f: *A*→*B*, diremos que f **está definida** para un elementosi existe un par. Esto se escribe como f(*a*) = ↓. Por el contrario, escribiremos f(*a*) = ↑ cuando f no está definida para *a*.
Una función que no es total, es decir, que está indefinida para algún/os elemento/s, se conoce como parcial.
La **función parcial** es una relación que asocia a cada elemento de un conjunto (a veces denominado dominio) con, como máximo, uno de los elementos de otro conjunto (que puede ser el mismo), llamado codominio. En cualquier caso, no es necesario que todos los elementos del dominio estén asociados con algún elemento del codominio.
Si todos los elementos de un conjunto X se asocian con un elemento de Y mediante una función parcial f:X→Y, entonces se dice que f es una funcióntotal, o simplemente una función, como se entiende tradicionalmente este concepto en matemáticas. No todas las funciones parciales son funciones totales.
El primero de los diagramas mostrados (fig 1) representa una función parcial; no es una función total porque el elemento 2 en el conjunto de la izquierda no está asociado con ningún elemento del conjunto de la derecha.
Considérese la función del logaritmonatural, que relaciona el conjunto de los números reales consigo mismo. El logaritmo de un número real negativo no es un número real, así que el logaritmo natural no asocia a todos los elementos del codominio con un elemento del dominio. Por lo tanto, el logaritmo natural no es una función total cuando se la considera como una función del conjunto de números reales consigo misma, sino una función parcial. Si el dominio se restringiera al conjunto de los reales positivos, entonces si se trataría de una función total.
Luego es importante realizar la distinción entre los conceptos, conjunto de partida y dominio, así como entre los conceptos, conjunto de llegada e imagen o codominio.
El conjunto de partida es el universo en el que se define la variable independiente de la función siendo el dominio un subconjunto de este, y el conjunto de llegada es el universo donde se define la variable dependiente en el cual el conjunto imagen o codominio es un subconjunto de él.
Se debe destacar entonces que la correspondencia que asocia a cada elemento del dominio un único elemento del conjunto imagen es una función total o simplemente función.
Existen funciones que no están definidas para ciertos valores del conjunto de partida, pero tiene un significado particular su comportamiento en las cercanías de estos puntos, por lo que aunque no pertenezcan a su dominio de definición es muy importante tenerlos en cuenta por la información que brindan, a este tipo de funciones se les denomina función parcial como ya se había avizorado anteriormente.Por tanto es importante hablar en las funciones parciales, de conjunto de partida y de conjunto de llegada.

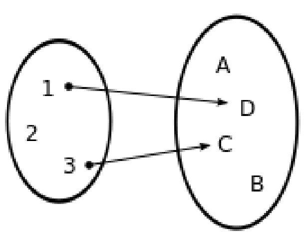


fig 1
Ejemplo de una función parcial que no es una función total.

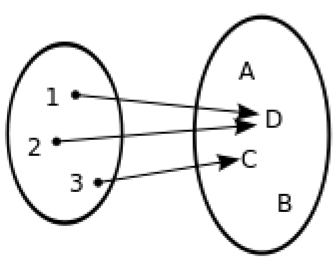


fig 2
Ejemplo de una función total.

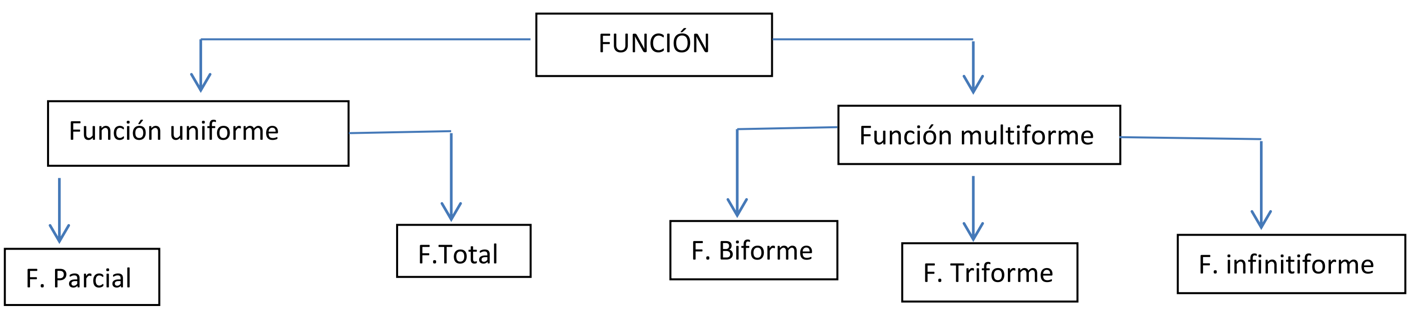
En la Secundaria Básica, se estudia el concepto función como una correspondencia entre dos conjuntos y se tratan las funciones lineales y cuadráticas. Previo al estudio de la función lineal, en la Enseñanza Primaria, se define proporcionalidad directa y se expresa mediante una función lineal definida en cierto conjunto que tiene como ecuación $y = kx$ (k es un número real distinto de cero).De igual forma se define la función de proporcionalidad inversa.
Posteriormente se estudia la función modular y las funciones potenciales, con especial énfasis en las funciones y=f(x) definidas en un subconjunto de IR por medio de $y = x^{-1}$, $y = x^3$,o que se obtienen de estas al modificar la gráfica que las representa mediante una traslación en la dirección de los ejes de coordenadas o mediante una dilatación, contracción, o reflexión respecto al eje de las abscisas.
El concepto de función que se estudia en la Secundaria Básica cubana se define de la siguiente forma: una función f de A en B es una correspondencia que asocia a cada elemento del conjunto A un único elemento del conjunto B.
Para lograr que los alumnos reactiven este concepto se parte de un conjunto de problemas que involucran situaciones de correspondencia y de variación de carácter intra- y extramatemático, que posibilitan discriminar lo común que tienen aquellas que se pueden modelar a través del concepto función. A partir de estos ejemplos los alumnos deben comprender que el dominio de definición de una función que pertenece a una clase de funciones determinada no siempre es el conjunto de los números reales, por ejemplo, la función puede pertenecer a la clase de las funciones lineales y su dominio no ser el conjunto de los números reales.
Luego es de interés para la matemática definir el concepto función de la siguiente manera:
Una función $f : X \to Y$ es un conjunto de pares ordenados $(x; y)$ tal que cada $x \in X$ aparece como la primera coordenada de solo un par ordenado.
Se tiene en cuenta que para que una función esté determinada, debe indicarse su dominio, su codominio y el conjunto de pares ordenados. En los casos en que la relación entre los elementos de ambos conjuntos se expresa mediante una expresión analítica, es suficiente indicar el dominio.
Profundizando sobre este particular, se considera que en el concepto función hay tres aspectos esenciales a tener en cuenta: uno es el de correspondencia, otro es el de covariación (variación conjunta de los argumentos y los valores de la función) y el tercero, es su carácter de objeto matemático con el cual se opera y se establecen relaciones

El 11no grado de la enseñanza preuniversitaria en la tercera unidad correspondiente a su plan de estudio comienza con un repaso del concepto de función, a partir de la realización de ejercicios y problemas (intramatemáticos y extramatemáticos) en los cuales se apliquen las propiedades y la representación gráfica de las funciones estudiadas.
Se estudian las propiedades globales de las funciones: cero, signo, monotonía, valor máximo y/o mínimo, simetría del gráfico, paridad e inyectividad, a partir de la restricción del dominio de las funciones estudiadas, donde se utilicen la modelación de funciones a partir de la variación de parámetros en su ecuación. Función inyectiva, sobreyectiva y biyectiva.
Se comienza con la suma y diferencia de funciones y se elaborara el concepto de función compuesta, determinando posteriormente la ecuación de la función compuesta que se obtiene de dos funciones y profundizando en el determinar la ecuación de la inversa de cualquier función.
Siendo consecuente con la definición del concepto función dado en Secundaria Básica es incongruente hablar de la propiedad de sobreyección de las funciones ya que si el conjunto de partida coincide con el dominio de definición de la función, siempre se obtendrá una imagen para cada elemento de este sea cual fuere la relación de correspondencia(ecuación de la función), por lo que todas las funciones serían sobreyectivas.
En la escuela se estudia además el polo de una función y este es un elemento que no pertenece al dominio de definición, pero brinda importante información sobre el comportamiento de la función en sus cercanías y al no pertenecer al dominio no le corresponde ningún elemento del conjunto imagen por lo que la función referida es parcial.
Por estas entre otras razones se considera que se deba definir en la escuela el concepto de función parcial y el de función total como ejemplos de funciones uniformes.

Funciones unívocas y multívocas

Las funciones se clasifican de acuerdo a las relaciones que ligan a la función con su variable independiente; resta ahora clasificarlas atendiendo al modo con que las alteraciones de la variable influyen en la función o a la ley que se observa en la sucesión de valores de esta. Bajo este aspecto tenemos que hacer dos divisiones importantes de las funciones.

Si a cada valor de x le corresponde sólo un valor de y, decimos que y es una función unívoca de x o que *f* (x) es unívoca o que *f* (x) es uniforme. Si por el contrario, a cada valor de x le corresponde más de un valor de y diremos que la función es multívoca, multiforme o multivaluada.
Una función multiforme puede considerarse como una colección de funciones unívocas; cada miembro de esta colección se llamará rama de la función. Se suele considerar un miembro particular como una rama principal de la función multiforme y el valor correspondiente a esta rama como el valor principal. La multiformidad de la función depende del grado de la ecuación en virtud de la cual se determina por medio de su variable. Se llama *biforme* cuando a cada valor de la variable corresponden dos en la función, como en $\sqrt{ax+x^2}$,si P y Q son funciones de x , la función *X de x* se determine por esta ecuación $X^2 - PX + Q = 0$ *;* es *triforme* cuando a cada valor de la variable independiente corresponden tres en la función(variable dependiente); *cuadriforme* cuando cuatro; y en general *multiforme* cuando muchos; así, la expresión $X^n - PX^{n-1} + QX^{n-2} - RX^{n-3} + SX^{n-4} - \ldots$=0 Siendo *P,Q, R,S…*etc. funciones de *x,* es la fórmula general de las funciones multiformes. Las funciones trascendentes también pueden ser uniformes y multiformes, además las hay *infinitiformes*, o que pueden tener para cada valor de la variable, todos los valores que se quiera, como es el arco de círculo cuyo seno es *; pues hay innumerables arcos circulares [i5] que tienen el mismo seno.
Ejemplo
Si $w = z^2$, entonces para cada valor de z existe un solo valor de w. Por tanto, $f(z) = z^2$ es una función unívoca de z.
Ejemplo
Si $w = \pm z^{1/2}$, entonces para cada valor de z existen dos valores de w. Por ello, $f(z) = \pm z^{1/2}$ es una función multiforme (bivaluada en particular) de z.
Teniendo en cuenta lo anteriormente expuesto se puede definir el concepto función de la siguiente forma:
Sean X e Y dos conjuntos cualesquiera, la correspondencia que se establece entre los elementos de X y los elementos de Y, independientemente de la forma en que estos se relacionan, recibe el nombre de función.
El siguiente gráfico muestra las relaciones entre los conceptos anteriormente explicados.



Bibliografía.

1- Demidovich, B. Problemas y ejercicios de Análisis Matemático. Editorial MIR. Moscú, 1980.
2- Kudriátsev, V.A, Demidovich, B. Breve Curso de Matemáticas Superiores. Editorial MIR. Moscú, 1989.
3- IIín, V, Pozniak, E. Fundamentos del Análisis Matemático. Editorial MIR. Moscú, 1991. Tomo I.
4- Colectivo de autores. Libro de texto 8vo grado. Editorial Pueblo y Educación, 2005.
5- Stewart, J. Cálculo con trascendentes tempranas. Editorial Pueblo y Educación, 2011. Parte I.
6- http://books.google.com.cu/books?id=FA-325NIKJ8C&hl=es&output=text&pg=PR3&img=1&zoom=3&hl=es&q=funciones+multiformes&cds=1&sig=ACfU3U1TmRk1mNt353-SxgdiTg9vuARETg&edge=0&edge=stretch&ci=90,237,855,1044.

7- http://books.google.com.cu/books?id=shJI2qvT16wC&pg=PA8&dq=funciones+multiformes&hl=es&sa=X&ei=b1ptVKf6BsKngwSJhIKgCw&ved=0CC8QuwUwAg#v=onepage&q=funciones%20multiformes&f=false.

Autores:

DrC. Carlos Manuel Caraballo Carmona, profesor titular, especialidad Matemática, profesor de Análisis Matemático de la Facultad de Educación Media de la U.P.R. Hermanos Saiz.
Dirección particular: Calle Proyecto # 4 Reparto La Conchita. Pinar del Río
e-mail: carlosmanuel@ucp.pr.rimed.cu

MSc. Francisco Lázaro García Fernández, profesor auxiliar, especialidad Matemática profesor de Álgebra de la Facultad de Educación Media de la U.P.R: Hermanos Saiz,
Dirección particular: Calle Galiano # 31 entre Alfredo Porta y Virtudes. Pinar del Río
e- mail: franciscol@ucp.pr.rimed.cu

Lic. Serdaniel Nieves Pupo, especialidad Matemática, profesor de Análisis Matemático de la Facultad de Educación Media de la U P R: Hermanos Saiz
Finca: El Yucayo, Taco Taco, San Cristobal, Artemisa.
Serdaniel @ucp.pr.rimed.cu