MENDIVE
REVISTA DE EDUCACIÓN

Dificultades para argumentar el uso de registros semióticos en problemas de variación cuadrática

Difficulties in arguing the use of semiotic registers in quadratic variation problems

Dificuldades em sustentar a utilização de registos semióticos em problemas de variação quadrática

Wilmer Ríos-Cuesta[1]
http://orcid.org/0000-0001-8129-2137

[1]Universidad del Valle. Colombia.
wilmer.rios@correounivalle.edu.co

Recibido: 30 de enero 2021.
Aceptado: 23 de marzo 2021.

RESUMEN
Se presenta un estudio de caso cualitativo con un enfoque experimental, en el que se buscó comprender la falta de participación en clase de un grupo de 14 estudiantes de 9° grado en una institución pública en el departamento del Chocó. Indagamos sobre las cuestiones operativas que desarrollan al momento de resolver un problema de variación cuadrática mediante la presentación de varios registros semióticos de la tarea y situando la mirada en los argumentos que ofrecen para justificar su razonamiento. Encontramos una marcada preferencia hacia el registro tabular, aunque no es el óptimo para resolver la tarea, y una dificultad para ofrecer argumentos basados en evidencias que le den mayor fuerza a su razonamiento. Se debe promover la participación en clase por medio de tareas abiertas, comenzar a desarrollar procesos argumentativos en grados inferiores y minimizar la enseñanza centrada en la memorización y aplicación de algoritmos para poder desarrollar pensamiento matemático.

Palabras clave: registros; representaciones semióticas; variación cuadrática; argumentación; mediación.

ABSTRACT
We present a qualitative case study with an experimental approach in which we sought to understand the lack of participation in class of a group of 14 9th grade students in a public institution in the department of Chocó. We inquired about the operational issues they develop when solving a quadratic variation problem by presenting several semiotic registers of the task and focusing on the arguments they offer to justify their reasoning. We found a marked preference for the tabular register, although it is not the optimal one to solve the task, and a difficulty to offer arguments based on evidence that give more strength to their reasoning. Class participation should be promoted through open tasks, starting to develop argumentative processes in lower grades and minimizing teaching focused on memorization and application of algorithms to develop mathematical thinking.

Keyword: registries; semiotic representations; quadratic variation; argumentation; mediation.

RESUMO
Apresentamos um estudo de caso qualitativo com um focus experimental

na qual procurámos compreender a falta de participação na aula de um grupo de 14 alunos do 9º ano numa instituição pública do departamento de Chocó. Questionamos sobre as questões operacionais que desenvolvem quando solucionam um problema de variação quadrática, através da apresentação de vários registos semióticos da tarefa e concentrando-nos nos fundamentos que oferecem para justificar o seu raciocínio. Encontrámos uma preferência marcada pelo registo tabular, embora não seja o ideal para resolver a tarefa, e uma maior dificuldade em oferecer argumentos baseados em provas que dão maior força ao seu raciocínio. A participação nas aulas deve ser incentivada por meio de tarefas abertas, começando a desenvolver processos argumentativos nas notas mais baixas e minimizando o ensino baseado na memorização e aplicação de algoritmos, a fim de desenvolver o pensamento matemático.

Palavras-chave: registos; representações semióticas; variação quadrática; argumentação; mediação.

INTRODUCCIÓN

Desde la educación matemática se propone el estudio de la función cuadrática, una vez los estudiantes tienen cierto dominio de la resolución de ecuaciones cuadráticas. En ese proceso, los estudiantes se valen de técnicas como la factorización mediante factores comunes, el patrón suma producto, agrupación, trinomios cuadrado perfecto, diferencia de cuadrados, completación de cuadrados o la identificación de los coeficientes a, b y c para usarlos en la formula cuadrática $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Algunos de los problemas que se proponen a los estudiantes y que tratan el estudio de la función cuadrática requieren el cálculo del foco, vértice, puntos de corte, máximos y mínimos. Sin embargo, los fenómenos de variación cuadrática a nivel escolar se han dejado para el estudio de la física en los problemas relacionados con el lanzamiento de proyectiles, donde se solicita calcular la altura máxima, alcance máximo y tiempo de vuelo.

El abordaje de situaciones de variación cuadrática requiere que los estudiantes estén en capacidad de identificar las variables, plantear las ecuaciones y utilizar un método de resolución acorde a la heurística que poseen y que han construido a lo largo de su proceso formativo. A este tipo de problemas se le ha dado un tratamiento algebraico que opaca la búsqueda de soluciones geométricas y se ha reducido al trazado de la curva. En particular, pretendemos darle varias alternativas de solución al estudiante, que le permitan consolidar su pensamiento moviéndose por varios registros semióticos que medien su actividad cognitiva como la representación gráfica, tabular, analítica y verbal (Duval, 1993).

La justificación de este estudio radica en aportar elementos teóricos para comprender la falta de participación en la actividad matemática que realizan en el aula un grupo de estudiantes de secundaria de un colegio público del departamento del Chocó, en Colombia.

Hemos notado que en las clases hay un uso excesivo de algoritmos, los cuales son presentados a los estudiantes como una obra ya terminada, hay una memorización excesiva de contenidos y se nota que los estudiantes evaden el conflicto cognitivo mediante la adhesión a las explicaciones que dan sus pares (Castellaro y Peralta, 2020).

Para lograr el propósito de este estudio, se dirige la mirada hacia la producción de argumentos por medio del uso de distintos registros semióticos de la actividad que se realiza.

Los estudios sobre argumentación en clase de Matemática han permitido analizar la actividad discursiva en el aula en torno a la construcción individual o colectiva de argumentos válidos. Krummheuer (2007) concibe la argumentación como un fenómeno social, poniendo el énfasis en la interacción de los estudiantes, e indica que, el aprendizaje de las matemáticas depende de los procesos de argumentación que se desarrollan al interior del aula de clases. Al respecto, Rumsey & Langrall (2016) sostienen que la argumentación brinda a los estudiantes la posibilidad de socializar sus procedimientos, respuestas y puntos de vista sobre la actividad matemática que desarrollan.

Ríos-Cuesta (2020) comenta que la argumentación brinda la oportunidad a los estudiantes de remover las dudas sobre sus producciones al tener que verbalizar sus ideas para que el profesor, como representante del saber, se encargue de institucionalizar los procedimientos válidos y así lograr un aprendizaje con sentido. Esto ayuda a desarrollar la parte cognitiva y la interacción social.

Chico (2018) señala que para desarrollar argumentación en clase se requiere, por parte del estudiante, mayores niveles de argumentación matemática, por el hecho de tener que convencer a sus compañeros de clase; esto tiene una mayor demanda cognitiva, lo cual ayuda a consolidar su pensamiento.

Además, la argumentación matemática, vista como práctica social en el aula, tiene el propósito de tratar de convencer a otros o a sí mismo sobre un punto de vista. Esto conlleva a que los estudiantes desarrollen habilidades como el análisis de las argumentaciones de sus compañeros para consolidar o rechazar su razonamiento.

Cervantes-Barraza & Cabañas-Sánchez (2018) ofrecen un estudio sobre argumentación geométrica usando el modelo de Toulmin. Su metodología de investigación se basó en el paradigma de investigación de diseño con un enfoque cualitativo mediante un experimento de enseñanza. Se destaca, entre sus hallazgos, que los estudiantes usan argumentos diagramáticos los cuales se asocian con la visualización del objeto de estudio. Sin embargo, sus respuestas carecen de sustento matemático, lo cual es una prueba de que los estudiantes se alejan del formalismo de las matemáticas. No obstante, los autores sugieren el uso de tareas en los que se fomente la exploración mediante argumentos basados en garantías.

Fiallo & Gutiérrez (2017) comentan que un argumento está constituido por una cadena de enunciados verbales que se basan en elementos matemáticos que buscan explicar un resultado.

Por otro lado, los estudios sobre argumentación sostienen que esta se genera mediante la interacción entre el profesor y estudiante (Chico, 2018). Sin embargo, en este estudio nos ubicamos en el concepto de interactividad (Coll, *et al.* 1992) definido como:

> […] la articulación de las actuaciones del profesor y de los alumnos [...] en torno a una tarea o un contenido de aprendizaje determinado, supone pues una llamada de atención sobre la importancia de analizar las actuaciones de los alumnos en estrecha vinculación con las actuaciones del profesor; y recíprocamente (p. 204).

El concepto de interactividad es más amplio que el de interacción, puesto que supera los intercambios verbales, se entiende como "las formas de organización de la actividad conjunta" (Coll *et al.*, 1992, p. 192).

Con esto en mente se procedió a indagar sobre las cuestiones operativas que desarrollan al momento de resolver un problema de variación cuadrática mediante la presentación de varios registros semióticos de la tarea y situando la mirada en los argumentos que ofrecen para justificar su razonamiento.

MATERIALES Y MÉTODOS

Reportamos un estudio de casos de corte cualitativo con un enfoque empírico experimental (Stake, 2010), que busca describir e interpretar la forma en que los estudiantes resuelven un problema de variación cuadrática poniendo énfasis no solo en la solución, sino en los registros semióticos y los argumentos usados para validar su postura.

Se establecieron dos categorías de análisis de la información recogida, lo que permitió el análisis e interpretación de las producciones.

En la primera analizamos el tipo de representación semiótica que usan los estudiantes para resolver el problema.

En la segunda revisamos si se producían argumentos para sustentar la solución de la tarea y el modelo de solución elegido.

El curso estaba conformado por 14 estudiantes de secundaria entre 14 y 17 años, de una institución educativa pública en el departamento del Chocó, los cuales cursan noveno grado de Educación Básica Secundaria en Colombia. Se usó un cuestionario con preguntas semiabiertas, donde los estudiantes podían argumentar la elección de determinado registro semiótico para resolver la tarea planteada y explicar el procedimiento seguido.

En los diálogos se usan seudónimos para proteger la identidad de los menores y así cumplir con las cuestiones éticas del estudio.

La experiencia que permitió la toma de los datos consistió en la resolución de una tarea que solicitaba a los estudiantes encontrar dos números enteros positivos cuya suma sea 30 y cuyo producto sea el máximo posible.

Se les presentaron diversos registros para indagar sobre las preferencias al comunicar sus resultados; de este modo, tratar de comprender la manera como entienden el problema y llevarlos a usar otros tipos de representaciones. A continuación, se presentan los diversos registros usados en el estudio.

El registro tabular que se presenta en la tabla 1 consiste en asignar un valor creciente y otro decreciente de modo que se cumpla con la propiedad de que la suma es igual a 30 y se calculan sus productos.

Tabla 1- Registro tabular del problema

N. 1	N. 2	Suma	Producto
30	0	30	0
29	1	30	29
28	2	30	56
27	3	30	81
26	4	30	104
25	5	30	125
24	6	30	144
23	7	30	161
22	8	30	176
21	9	30	189
20	10	30	200
19	11	30	209
18	12	30	216
17	13	30	221
16	14	30	224
15	15	30	225
14	16	30	224
13	17	30	221
12	18	30	216
11	19	30	209
10	20	30	200
9	21	30	189
8	22	30	176

7	23	30	161
6	24	30	144
5	25	30	125
4	26	30	104
3	27	30	81
2	28	30	56
1	29	30	29
0	30	30	0

El segundo registro presentado es el algebraico, compuesto por el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + y = 30 \\ xy = A \end{cases}$, en el cual se muestran las condiciones del problema, pero no aparece el valor máximo buscado. Esto requiere otro tipo de análisis para su resolución y una mayor demanda cognitiva.

En tercera instancia se les presentó el registro gráfico. Este complementa el registro tabular y muestra, en el eje de las ordenadas, el valor máximo que se requiere en el registro algebraico.

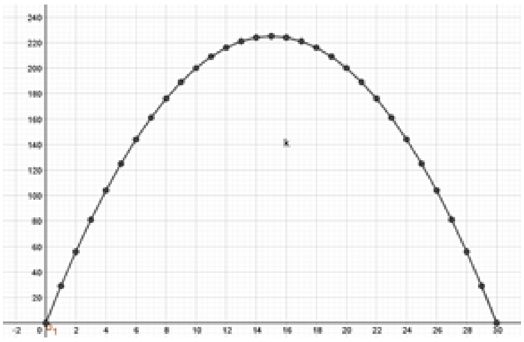

Fig. 1- Registro gráfico del problema

El cuarto registro es el geométrico. Este se construye trasladando la información del problema a un rectángulo de lados x y y como se muestra en la figura 2.

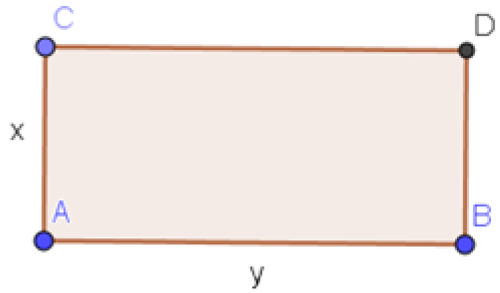

Fig. 2 - Representación geométrica del problema

Esta representación cumple con que:

$$\frac{P}{2} = x + y$$

$$A = xy$$

En este registro se asume que la suma de los dos números constituye el semiperímetro de un rectángulo de lados x y y.

Otro registro gráfico que permite conseguir la solución del problema está conformado por el punto donde se interceptan las rectas $y = 30 - x$ que resulta de despejar $x + y = 30$ y luego hallar la función inversa de y ; esto nos da una solución lineal del problema (figura 3).

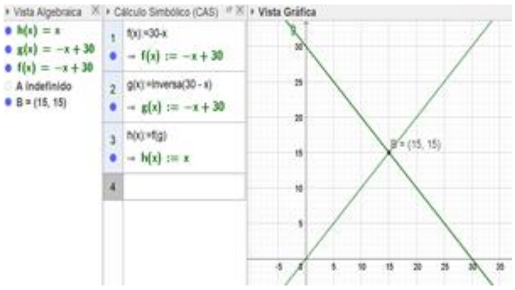

Fig. 3 - Solución lineal del problema

Como herramienta de análisis se propone el modelo de Toulmin (2003) para explicar la estructura de los argumentos (figura 4). Este modelo se compone de los *datos D* (data), los *permisos de inferir Pi* (warrant), el *soporte S* (backing), el *indicador de fuerza modal F* (modal qualifiers) del argumento, las *refutaciones potenciales Rp* (rebuttals) y la aserción *E* (claim).

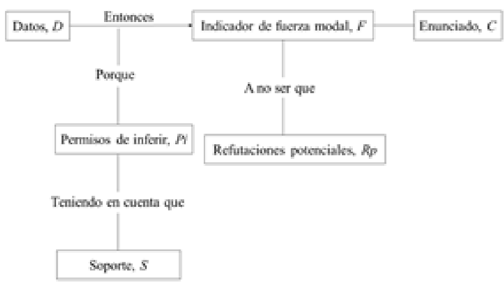

Fig. 4 - Modelo de Toulmin

Los datos *D* son hechos o evidencias con los que se cuenta para iniciar el proceso de argumentación.

Los permisos de inferir *Pi* son una regla general o principio que sirve de fundamento para pasar de los datos al enunciado. Se manifiesta mediante una serie de afirmaciones que buscan establecer la relación entre los datos y el enunciado.

El soporte *S* es la base para los permisos de inferir. Este soporte autoriza los permisos de inferir y brinda motivos de validez.

El indicador de fuerza modal *F* muestra el grado de certeza o la fuerza del enunciado.

Las refutaciones potenciales *Rp* son las excepciones a la aserción, casos particulares o contraejemplos.

El enunciado *C* es la aserción a la que se llega como resultado del proceso de argumentación.

Cuando una persona emite un argumento, toma en cuenta los datos y de acuerdo con la lectura que haga de estos, emite una conclusión o enunciado. En esa transición se hace uso del permiso de inferir, el cual teje un puente entre los datos y la conclusión. En ese sentido, el permiso de inferir es una regla o principio que permite establecer una conexión lógica, de modo que, cuando se hace una refutación al argumento, lo que se cuestiona es el permiso de inferir; en consecuencia, el estudiante se ve inmerso en una situación en la que debe hacer más explícitos los permisos de inferir. Al darse la situación anterior, el estudiante puede recurrir al soporte para explicitar el permiso de inferir haciendo uso de justificaciones.

Si bien el modelo nos brinda elementos para analizar la estructura de los argumentos, Solar & Deulofeu (2016) indican que rara vez todos los elementos del modelo aparecen en una clase. En consecuencia, Molina-Jaime *et al.* (2019) usan una estructura ternaria del modelo de Toulmin (2003) basada en los datos, permisos de inferir y conclusión (figura 5).

Fig. 5 - Estructura ternaria del modelo de Toulmin (Molina-Jaime *et al.*, 2019)

Consideramos, entonces, que hay un argumento si se ofrecen, al menos, tres de los elementos del modelo de Toulmin descritos por Molina-Jaime *et al.* (2019); sin embargo, el propósito de este estudio no fue caracterizar los argumentos de los estudiantes sino analizar su existencia.

RESULTADOS

Inicialmente se les solicitó que resolvieran el problema de encontrar los dos números que cumplieran las condiciones dadas. Los estudiantes trabajaron de manera individual durante 20 minutos sin la intervención del profesor. Destacamos que solo dos estudiantes resolvieron la tarea mediante una representación tabular.

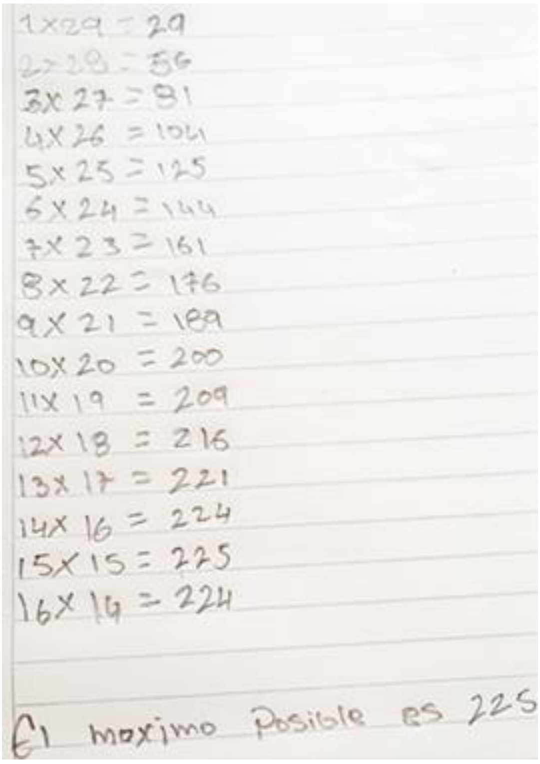

Fig. 6- Respuesta individual a la tarea 1

Posterior a la presentación de los resultados se les solicitó a los estudiantes que argumentaran sus producciones; con esto se intentó originar discusión y debate para tratar de sobreponer un resultado sobre otro.

En el discurso que se originó en clase los estudiantes tratan de justificar la elección de su proceder; se destacan las respuestas de tres estudiantes que expresaron lo siguiente:

> Juan: Hacemos una tabla que vaya del 29 para abajo y esa tabla la vamos a multiplicar con números enteros positivos, el número que tenga la multiplicación más alta será nuestro producto máximo posible. Y en este caso sería el 15 ya que la suma da 30 y el producto da 225.

> Valentina: Sumamos 15+15 y el resultado nos da 30 y al multiplicar 15×15 el resultado que nos da es 225, al hacer la multiplicación con otros números el resultado era menos.

> Nubia: Hice una tabla con números enteros hasta el 30 que es el resultado que queremos encontrar y así me di cuenta de que los dos números enteros es [son] el 15 [y 15] y cuya suma nos da 30 como resultado.

Como el interés era generar argumentación, se les pidió que ampliaran un poco más su elección. Notamos una dificultad para generar argumentos, tal como lo mostramos en el siguiente aporte de un estudiante:

> Camilo: Usé la forma para despejar la ecuación, lo que me dio y ; 225 es el máximo producto.

> Sebastián: Porque al sumar estos números efectivamente dan 30 y si se multiplican dan su máximo posible.

> Marlon: Hacemos una tabla que vaya del 29 para abajo y esa tabla la vamos a multiplicar con números enteros positivos, el número que tenga la multiplicación más alta será nuestro producto máximo posible. Y en este caso sería el 15 ya que la suma da 30 y el producto da 225.

> Carla: primero se hace una tabla con todos los números enteros cuya suma dé 30 y el producto sea el más grande, luego se comparan todos los productos para saber cuál es el más alto.

Los estudiantes se apoyan en procesos algorítmicos para mostrar sus resultados, no se observa que la actividad discursiva apunte a la confrontación, a convencer o validar sus producciones, sino que pretenden dar a conocer un resultado. Esto pone de relieve la ausencia de la argumentación como proceso retórico que ayude a persuadir al auditorio, dejando claro que no buscamos el formalismo lógico de la argumentación.

Posteriormente, se les presentaron a los estudiantes las cinco representaciones semióticas definidas en este estudio para que escogieran la que ellos consideran les permitía presentar de mejor forma sus resultados. La opción 1 corresponde al registro tabular, la opción 2 al algebraico, la opción 3 es el gráfico, la opción 4 es el geométrico y la opción 5 es el registro gráfico de solución lineal.

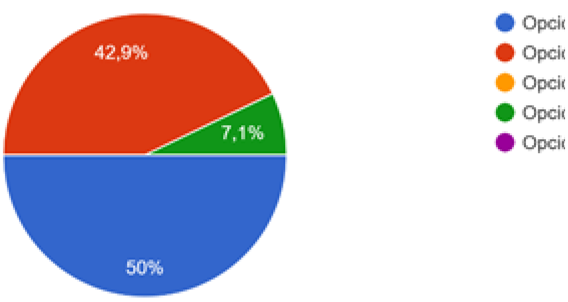

Fig. 7- Preferencia por los distintos registros semióticos de la respuesta

Se observa la tendencia hacia los registros uno y dos, los cuales resultan más claros para la presentación de los resultados; aunque el tipo de registro uno implica hacer más cuentas para completar la tabla.

A continuación, presentamos las justificaciones que ofrecieron los estudiantes ante su elección:

> Valentina: La opción que escogí (registro algebraico) me parece que es la más clara de manejar, aunque es un poco compleja; sin embargo, la opción uno es más fácil de manejar.

> Ruby: Porque es una tabla que nos muestra claramente la suma y su producto.

> David: Un sistema de ecuaciones, considero que nos daría un resultado más certero. Además de que es una manera un tanto sencilla y corta y, al final, una respuesta estética.

> Juan: Porque esta es la forma más fácil pero larga y es la que yo usé.

> Luisa: Porque es una tabla que nos muestra claramente la suma y su producto.

El discurso de los estudiantes apunta a esclarecer su proceder, pero no a dar datos, basarse en hechos o evidencias para emitir un argumento sólido.

DISCUSIÓN

Tal como lo señala Crespo (2005), una enseñanza basada en argumentos ayuda a eludir la memorización de algoritmos y contenidos que favorecen un aprendizaje mecánico. Sin embargo, en este estudio podemos evidenciar que a los estudiantes les cuesta argumentar sus producciones; existen dificultades en el razonamiento matemático, lo cual se observa al revisar el registro semiótico que prefieren para solucionar el problema.

La baja demanda cognitiva identificada en los estudiantes tiene implicaciones en la forma en que conciben las matemáticas y evita que incursionen en procesos de validación de sus producciones.

Para ellos la matemática tiene un carácter utilitario, más no funcional; es vista como una herramienta para hallar un resultado que pocas veces es sometido a prueba. En consecuencia, no se profundiza en la riqueza que tiene, a nivel intelectual, la tarea propuesta.

Se debe hacer un giro didáctico y entregarles el rol a los estudiantes de validar sus producciones mediante argumentos que deben ser debatidos y defendidos públicamente, como una oportunidad para aprender matemáticas. El profesor, como representante del saber en clase, tiene el deber de validar y aprobar los procedimientos aceptados en matemáticas. Sin embargo, el propósito de los estudiantes no debe ser la búsqueda de la validación del profesor sino la articulación de las ideas que este ofrece con las de sus pares y la riqueza conceptual de las ideas matemáticas.

Corroboramos la tesis de Goizueta (2019), quien señala que los estudiantes tienen dificultades para justificar lo que hacen y dicen en la clase de Matemática, lo cual dificulta la inclusión de tareas matemáticas más complejas favoreciendo la planeación de actividades en las que los estudiantes practican la ejecución de algoritmos prescritos por el profesor.

Coincidimos con Goizueta (2019) en que:

> La educación matemática debería preocuparse por el desarrollo de culturas matemáticas en las que la comunicación de cuestiones epistémicas sea relevante y prevalezca la disposición a hacerlo. Si esperamos que los profesores medien en el desarrollo de la cultura matemática del aula, deberían ser capaces de participar en conversaciones (meta)matemáticas significativas con sus alumnos. Cuando no se comunican los aspectos relevantes de la actividad (meta)matemática de los alumnos, la posibilidad de dicha mediación se ve comprometida y el profesor puede quedar relegado (involuntariamente) a ser un mero juez del rendimiento técnico. Por lo tanto, aprender matemáticas es también aprender lo que vale la pena comunicar sobre la actividad matemática (p. 10).

Si bien se busca generar desequilibrios cognitivos en los estudiantes para modificar su estructura cognitiva, se observa que lo evaden y que toman el camino más largo, pero con una menor demanda cognitiva.

Con este estudio hemos intentado señalar la dificultad adyacente que hay al tratar de fomentar la producción de argumentos en clase por estudiantes de secundaria que han usado la memoria como medio para aprender matemáticas. Estos estudiantes son producto de la enseñanza tradicional en la que los profesores tienen un rol protagónico en las clases y los estudiantes son espectadores de los contenidos que se presentan.

Reconocemos que en el aula de clases hay espacios donde el docente debe ofrecer algunas informaciones, sobre todo cuando se detectan vacíos o lagunas sobre el tema a tratar; sin embargo, esto no puede ser una constante en la clase de matemáticas, se debe promover, desde niveles inferiores, una transición hacia un ambiente de clase donde los estudiantes argumenten sus producciones de modo que estén habituados a este tipo de ambientes.

Las limitaciones de tiempo para desarrollar los currículos establecidos en las instituciones educativas del país son una de las causas que explican la dificultad para modificar algunas prácticas de aula, es importante desarrollar paulatinamente procesos cognitivos de orden superior en los estudiantes para favorecer niveles de pensamiento que los lleven a cuestionar el conocimiento y reflexionar de manera crítica frente a la sociedad.

Notamos que hay un conflicto en los estudiantes al afrontar una tarea cuya solución no es inmediata, esto es consecuencia del tipo de enseñanza al que están habituados donde se proponen tareas que se resuelven mediante a la aplicación de un algoritmo ya establecido en clase.

Por otro lado, se deben promover tareas que tengan una exigencia cognitiva sostenida y que mediante la argumentación se permita la discusión de los resultados y las producciones.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Castellaro, M., & Peralta, N. S. (2020). Pensar el conocimiento escolar desde el socioconstructivismo: Interacción, construcción y contexto, *Perfiles Educativos, 52*(168), 140-156. https://doi.org/10.22201/iisue.24486167e.2020.168.59439

Cervantes-Barraza, J., & Cabañas-Sánchez, G. (2018). Argumentos formales y visuales en clase de geometría a nivel primaria. *Educación Matemática*, *30*(1), 163183. https://doi.org/10.24844/EM3001.06

Chico, J. (2018). Impacto de la interacción en grupo en la producción de la lengua del álgebra en clase de matemáticas. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 14*, 31-47. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i14.243

Coll, C., Colomina, R., Onrubia, J., & Rochera, M. J. (1992). Actividad conjunta y habla: una aproximación al estudio de los mecanismos de influencia educativa. *Infancia y Aprendizaje*, *15*(5960), 189-232. https://doi.org/10.1080/02103702.1992.10822356

Crespo, C. (2005). La importancia de la argumentación matemática en el aula. *Premisa*, *24*, 23-29. http://www.soarem.com.ar/Documentos/24%20Crespo.pdf

Duval, R. (1993). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt, (Ed), *Investigaciones en Matemática*

Educativa II (pp. 173-201). Grupo Editorial Iberoamericana.

Fiallo, J., & Gutiérrez, A. (2017). Analysis of the cognitive unity or rupture between conjecture and proof when learning to prove on a grade 10 trigonometry course. *Educational Studies in Mathematics*, *96*(2), 145-167. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9755-6

Goizueta, M. (2019). Epistemic issues in classroom mathematical activity: There is more to students' conversations than meets the teacher's ear. *The Journal of Mathematical Behavior*, *55*, 1-11. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2019.01.007

Krummheuer, G. (2007). Argumentation and participation in the primary mathematics classroom. Two episodes and related theoretical abductions. *Journal of Mathematical Behavior, 26*, 60-82. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2007.02.001

Molina-Jaime, Ó. J., Font, V., & Pino-Fan, L. (2019). Estructura y dinámica de argumentos analógicos, abductivos y deductivos: un curso de geometría del espacio como contexto de reflexión. *Enseñanza de Las Ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *37*(1), 93116. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2484

Ríos-Cuesta, W. (2020). Competencias de argumentación y modelización en estudiantes de secundaria: la necesidad de un cambio de paradigma en la Educación Matemática del Chocó, Colombia. *Pesquisa E Ensino*, *1*, 1-21. https://doi.org/10.37853/pqe.e202020

Rumsey, C., & Langrall, C. W. (2016). Promoting mathematical argumentation. *Teaching Children Mathematics*, *22*(7), 412419. https://www.nctm.org/Publications/Teaching-Children-Mathematics/2016/Vol22/Issue7/Promoting-Mathematical-Argumentation/

Solar, H., & Deulofeu, J. (2016). Condiciones para promover el desarrollo de la competencia de argumentación en el aula de matemáticas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *30*(56), 1092-1112. https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n56a13

Stake, R. (2010). *Qualitative research: studying how things work*. The Guilford Press. https://www.amazon.com/-/es/Robert-Stake/dp/1606235451

Toulmin, S. (2003). *The uses of argument* (updated ed.). New York: Cambridge University Press. Original work published 1958. https://doi.org/10.1017/CBO9780511840005

Conflicto de intereses: El autor declara no tener conflictos de intereses.

Contribución de los autores:

El autor asumió de manera individual la elaboración de este trabajo.